03.11.2020

Temat:
Czy każde zdanie jest twierdzeniem?

ZASTANÓWMY SIĘ:

Czy podane zdanie jest prawdziwe, tzn. czy jest twierdzeniem?

a) Jeśli czworokąt ma prostopadłe przekątne d_1, d_2 leżące wewnątrz tego czworokąta, to jego pole wynosi:

$$P = \frac{d_1 \cdot d\ 2}{2}$$

b) Jeśli czworokąt ma prostopadłe przekątne to jest deltoidem.

Ad. a)

Tak, podane zdanie jest twierdzeniem - możemy udowodnić jego prawdziwość.

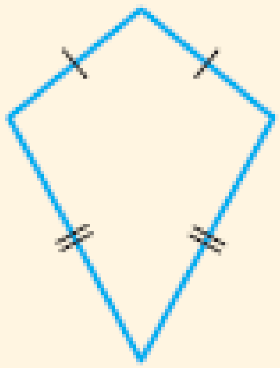
Zaczniemy od wypisania założenia i tezy.

Założenie: czworokąt ma prostopadłe przekątne d_1, d_2 leżące wewnątrz niego.

Teza: pole tego czworokąta pole wynosi

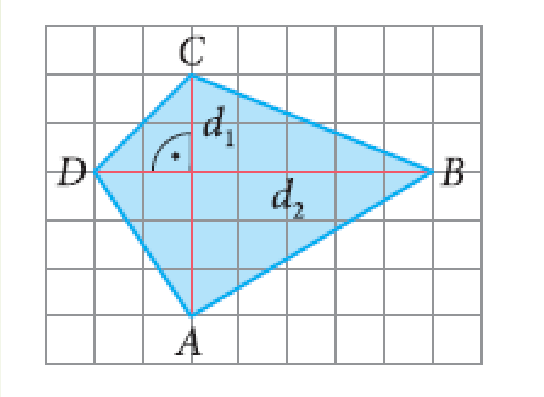
$$P = \frac{d1 \cdot d2}{2}$$

Deltoid to czworokąt, który ma dwie pary sąsiednich boków równych.
Romb również jest deltoidem.

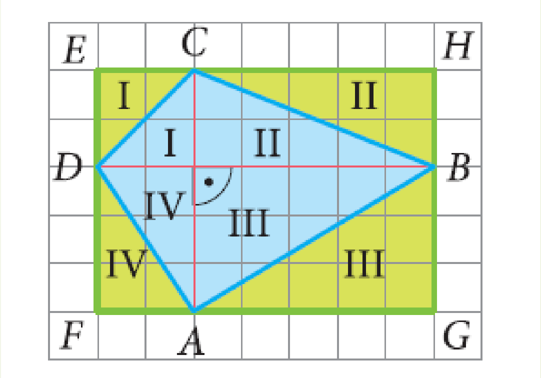


Dowód

Rysujemy czworokąt ABCD o prostopadłych przekątnych d_1 i d_2 leżących wewnątrz tego czworokąta.



Gdy dorysujemy proste równoległe do przekątnych czworokąta, przechodzące przez jego wierzchołki, otrzymamy prostokąt EFGH o bokach d_1, d_2, podzielony na 8 trójkątów.



Zauważmy, że jednakowo oznaczone trójkąty mają równe pola.

Zatem $P_{EFGH} = d_1 \cdot d_2$

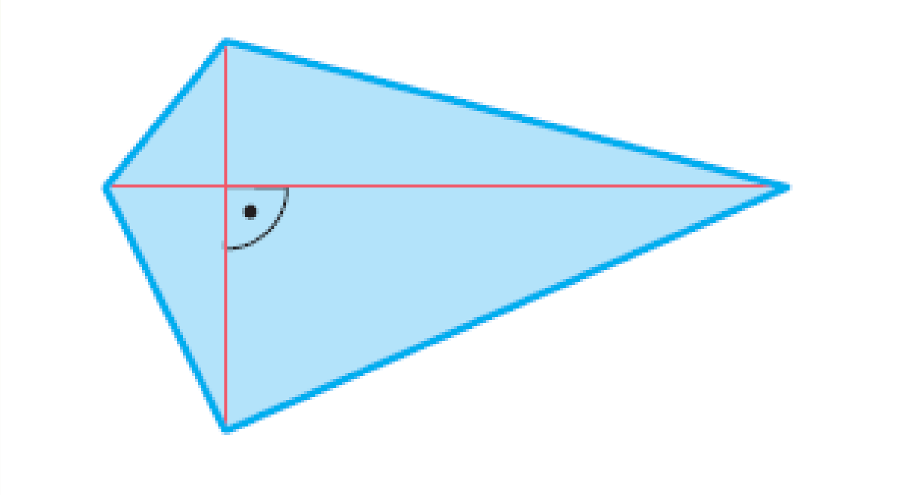
$P_{ABCD} = P_{EFGH} : 2$, czyli $P = \frac{d1 \cdot d2}{2}$ co należało udowodnić

PEFGH : $d_1 \cdot d_2$

Ad.b)

Zdanie: „Jeśli czworokąt ma prostopadłe przekątne, to jest deltoidem" nie jest prawdziwe.

Aby to uzasadnić, wystarczy podać przykład odpowiedniego czworokąta. Czworokąt przedstawiony obok ma prostopadłe przekątne, lecz nie jest deltoidem.



Każde ze zdań w podpunktach a) i b) w powyższym przykładzie dotyczy wszystkich czworokątów o opisanych własnościach.

Uzasadniając odpowiedź w podpunkcie b), podaliśmy tylko jeden przykład. Wskazany czworokąt nie jest deltoidem i to wystarczy, aby wykazać, że nie wszystkie czworokąty o prostopadłych przekątnych są deltoidami.

W podpunkcie a) nie wystarczy podawanie przykładów. Nawet, gdyby były ich tysiące, to i tak nie byłyby to wszystkie - pozostałaby wątpliwość, czy nie znajdzie się inny czworokąt, który spełnia założenie, ale jego pole nie jest równe. Dlatego niezbędne jest ogólne rozumowanie.

Aby uzasadnić, że zdanie;

- NIE JEST PRAWDZIWE, wystarczy znaleźć jeden przykład, który to potwierdza;

- JEST PRAWDZIWE, nie wystarczy nawet wiele potwierdzających to przykładów.

Zadanie 1:

Czy podane zdanie jest prawdziwe? Uzasadnij odpowiedź.

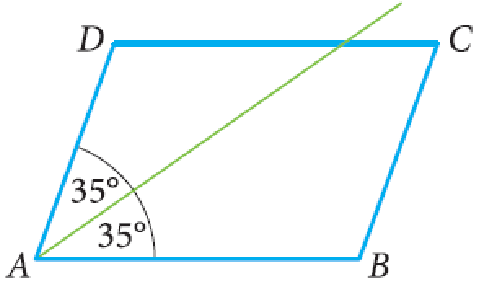
a) Jeśli liczba kończy się cyfrą 0, to jest podzielna przez 5.

b) Jeśli liczba jest podzielna przez 5, to kończy się cyfrą 0.

Zastanówmy się, czy poniższe zdanie jest twierdzeniem:

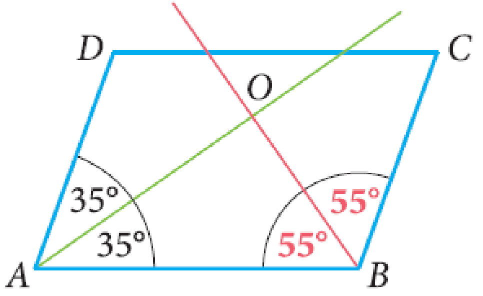
W RÓWNOLEGŁOBOKU DWUSIECZNE DWÓCH SĄSIEDNICH KĄTÓW PRZECINAJĄ SIĘ POD KĄTEM PROSTYM.

Zdanie dotyczy dowolnego (czyli każdego) równoległoboku. Nie wiemy, czy jest prawdziwe, więc warto zacząć od sprawdzenia przykładów, czyli od zbadania kąta przecięcia dwusiecznych w konkretnych równoległobokach. Sporządzamy rysunek.



Na rysunku zaznaczamy od razu połowy kąta ostrego (po 35°).

$\sphericalangle ABC = 180° - \sphericalangle DAB = 110°$ ← suma sąsiednich kątów równoległoboku wynosi 180°



Na rysunku podpisujemy połowy kąta rozwartego.

W trójkącie *AOB* znamy dwa kąty, a trzeci chcemy obliczyć.

$\sphericalangle AOB = 180° - 35° - 55° = 90°$ ← suma kątów trójkąta *AOB* wynosi 180°

Kąt między dwusiecznymi sąsiednich kątów w tym równoległoboku jest prosty.

Udowodnij, że w równoległoboku dwusieczne sąsiednich kątów przecinają się pod kątem prostym.

Założenie: Czworokąt jest równoległobokiem.
Teza: dwusieczne jego sąsiednich kątów przecinają się pod kątem prostym.

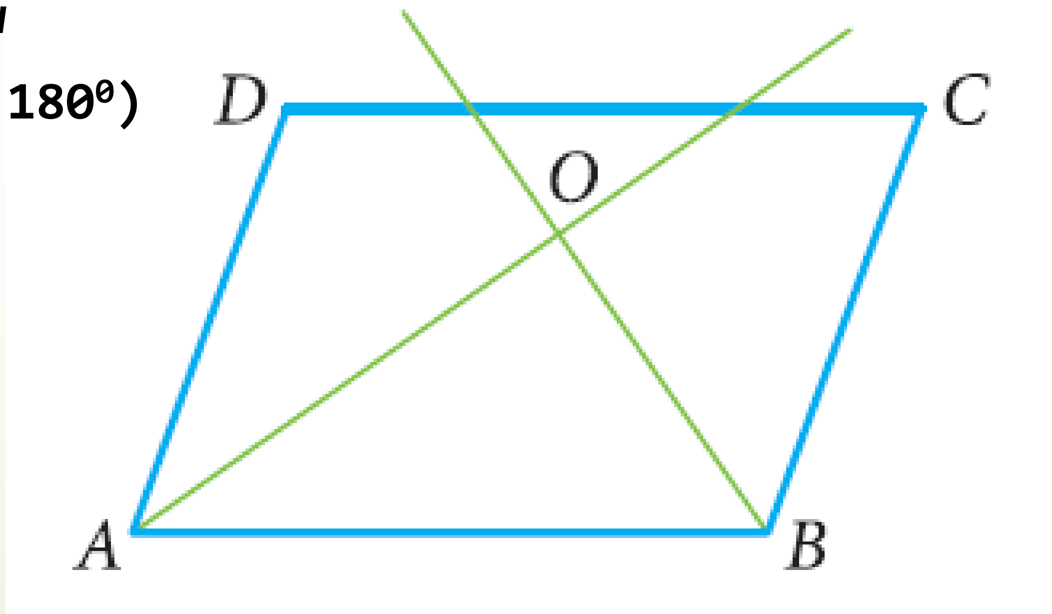
Dowód
Rysujemy równoległobok ABCD i dwusieczne kątów DAB i ABC. Oznaczamy punkt przecięcia tych dwusiecznych literą O.

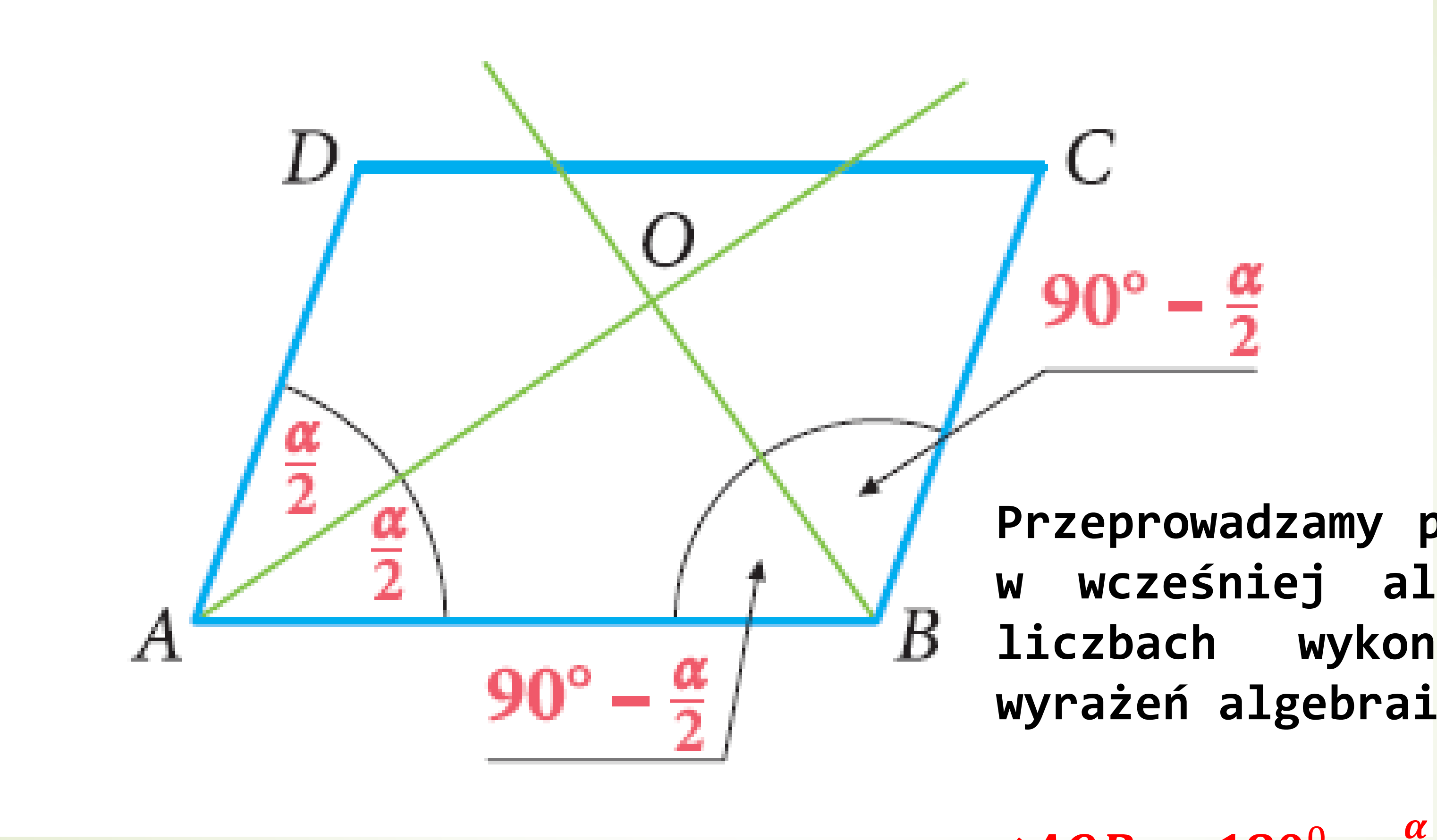
Przyjmijmy, że $\sphericalangle ABC = \alpha$. Dwusieczna dzieli ten kąt na kąty o miarach $\frac{\alpha}{2}$

$\sphericalangle ABC = 180° - \alpha$ (suma sąsiednich kątów równoległoboku wynosi 180^0)

$$\frac{\sphericalangle ABC}{2} = \frac{180-\alpha}{2} - = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

(dwusieczna dzieli kąt na połowy)





Przeprowadzamy podobne obliczenia jak w wcześniej ale zamiast działań na liczbach wykonujemy przekształcenia wyrażeń algebraicznych.

$\measuredangle AOB = 180^0 - \frac{\alpha}{2}$ - $(90^0 - \frac{\alpha}{2})$

(suma kąrów trójkąta AOB wynosi 180°)

$\measuredangle AOB = 180^0 - \frac{\alpha}{2}$ - $90^0 + \frac{\alpha}{2}$ = 90^0

$\measuredangle AOB = 90^0$, co należało udowodnić.